Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

Una **Ecuación Diferencial** es aquella ecuación que contiene diferenciales o derivadas de una o más funciones.

Una **Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)**. Es aquella ecuación diferencial que contiene derivadas de una o mas funciones con respecto a una sola variable independiente.

Permiten modelar procesos dinámicos como: vaciado de recipientes, reactores químicos, movimientos amortiguados, desarrollos poblacionales; y situaciones estáticas como: deflexión de vigas y problemas geométricos.

A veces no hay una solución analítica, por lo que se necesitan aproximaciones numéricas.

Solución numérica de problemas de valor inicial (PVI)

Dada una ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = f(t,y)$

mediante técnicas de cálculo de primitivas se puede obtener la función $y(t) = y+C$.

Los métodos numéricos permitirán obtener valores aproximados $\boldsymbol{Y_t}$ de la solución $\phi(t)$ en puntos t igualmente espaciados.

$$\boldsymbol{Y_t} \approx y(t) = \phi(t)$$

La curva elegida de la familia $y+C$ se establece a partir del valor de la función $\boldsymbol{y}$ en el *valor inicial* de la variable independiente ($y(t_0)$).

Método de Euler o de la recta tangente

Se conocen: t_0, $Y_0 = \phi(t_0)$ y $Y'_0 = \phi'(t_0) = f(t_0, \phi(t_0)) = f(t_0, Y_0)$

Se obtiene un valor aproximado Y_1 de $\phi(t_1)$ moviéndose a lo largo de una recta tangente desde t_0 hacia t_1

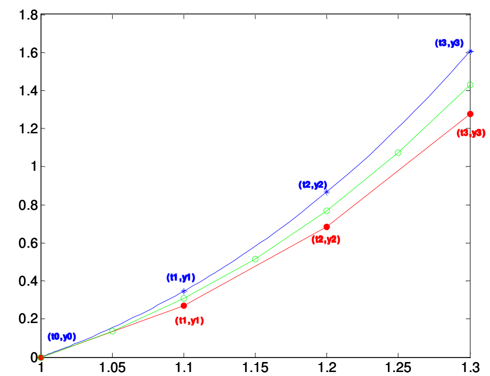
$$\phi'(t_0) = \frac{Y_1 - Y_0}{t_1 - t_0} \Rightarrow Y_1 = Y_0 + (t_1 - t_0)\phi'(t_0) = Y_0 + (t_1 - t_0) f(t_0, Y_0)$$

$$Y_1' = \frac{Y_2 - Y_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow Y_2 = Y_1 + (t_2 - t_1)Y_1' = Y_1 + (t_2 - t_1) f(t_1, Y_1)$$

En general
si $h = t_{k-1} - t_k$

$$\boxed{Y_{k+1} = Y_k + hf(t_k, Y_k)}$$

Gráficamente



Ejemplo

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2}{t}y + t^2e^t = f(t,y), \\ 1 \le t \le 2 \\ y(1) = 0, \quad h = 0.1 \end{cases}$$

$h = .1 \Rightarrow$ $\boldsymbol{t_0} = 1$, $\boldsymbol{t_1} = 1.1$, $\boldsymbol{t_2} = 1.2$, ...

La solución exacta es:

$$y(t) = t^2(e^t - e)$$

$$\phi(1.2) = 1.2^2(e^{1.2} - e) = .8666425$$

$$Y_0 = \phi(t_0) = \phi(1) = y(1) = 0$$

$$Y_1 = Y_0 + hf(t_0, Y_0) = 0 + 0.1 * f(1,0) = 0.1 * 2.718282 = 0.2718282 \approx \phi(1.10)$$

$$Y_2 = Y_1 + hf(t_1, Y_1) = 0.2718282 + 0.1 * f(1.1, 0.2718282) = 0.6847556 \approx \phi(1.20)$$

$$E_{h=0.1} = \phi(1.20) - Y_2 = 0.8666425 - 0.6847556 = 0.1818869$$

Si $\boldsymbol{h} = 0.05$

$\boldsymbol{t_0} = 1$, $\boldsymbol{t_1} = 1.05$, $\boldsymbol{t_2} = 1.1$, $\boldsymbol{t_3} = 1.15$, $\boldsymbol{t_4} = 1.2$

$$Y_0 = 0$$

$$Y_1 = Y_0 + hf(t_0, Y_0) = 0 + .05 * f(1,0) = .1359141 \approx \phi(1.05)$$

$$Y_2 = Y_1 + hf(t_1, Y_1) = .1359141 + .05 * f(1.05, .1359141) = .3063863 \approx \phi(1.10)$$

$$Y_3 = Y_2 + hf(t_2, Y_2) = .3063863 + .05 * f(1.10, .3063863) = .5159917 \approx \phi(1.15)$$

$$Y_4 = Y_3 + hf(t_3, Y_3) = .5159917 + .05 * f(1.15, .5159917) = .7696960 \approx \phi(1.20)$$

$$E_{h=0.05} = \phi(1.20) - Y_4 = .8666425 - .7696960 = .0969466$$

Error en la fórmula de Euler

Otra forma de deducir la fórmula del método de Euler para encontrar una aproximación de la solución *y(t)* del P.V.I. con solución única es usando el desarrollo en serie de Taylor alrededor del punto t_k, $\Rightarrow$

$$\boxed{\phi(\underbrace{t_k + h}_{t_{k+1}}) = \phi(t_k) + h\underbrace{\phi'(t_k)}_{f(t_k,\phi(t_k))}} + \boxed{\frac{h^2}{2!}\phi''(t_k)} + \cdots + \frac{h^n}{n!}\phi^{(n)}(t_k) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\phi^{(n+1)}\underbrace{(\xi_k)}_{t_k \le \xi_k \le t_{k+1}}$$

Form. Euler

Error local
$e_{k+1} = O(h^2)$

Error acumulado

$$E_T = \sum_{k=0}^{m-1} e_{k+1} = \frac{h^2}{2}\sum_{k=0}^{m-1}\phi''(\xi_k) = \frac{h^2}{2}m\phi''(\xi_k) = \frac{h}{2}\overbrace{\left(\frac{T-t_0}{m}\right)}^{h} m\phi''(\xi_k) =$$

$$= h\underbrace{\left(\frac{T-t_0}{2}\phi''(\xi_k)\right)}_{C} = Ch = O(h)$$

Si *h* se reduce a la mitad el error se reducirá a la mitad

Método de Euler mejorado o método Heun

Método Euler $Y_{k+1} = Y_k + hf(t_k, Y_k)$

Aproximando por la media aritmética de sus valores en los extremos del intervalo

$$Y_{k+1} = Y_k + \frac{h}{2}[f(t_k, Y_k) + f(t_{k+1}, Y_{k+1})]$$

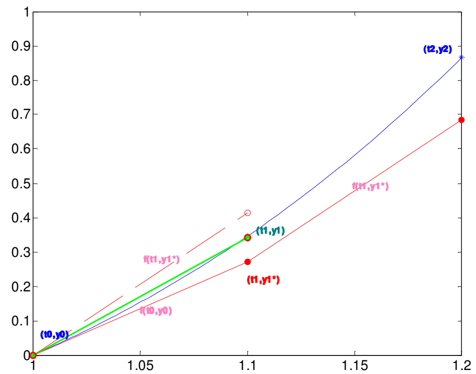
No se conoce

Como la incógnita Y_{k+1} aparece como uno de los argumentos en el segundo miembro de la ecuación (en este caso el **método** se dice **implícito**), se reemplaza Y_{k+1} por el valor que se obtuvo usando la fórmula de Euler sencilla (el **método** se convierte en **explícito**), obteniendo:

$$\boxed{Y_{k+1} = Y_k + \frac{h}{2}[f(t_k, Y_k) + f(t_{k+1}, Y_k + hf(t_k, Y_k))]}$$

Por Euler

Graficamente



Error en el método Heun

Otra forma de deducir la fórmula de Heun

Para obtener y(t) podemos integrar y'(t) en $[t_0, t_1]$

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t,y(t))dt = \int_{t_0}^{t_1} y'(t)dt = y(t_1) - y(t_0) \Rightarrow y(t_1) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(t,y(t))dt$$

Aplicando trapecios para calcular la integral, con $h=t_1-t_0$

$$y(t_1) \approx y(t_0) + \frac{h}{2}(f(t_0,y(t_0)) + f(t_1,y(t_1))) \Rightarrow \text{error} = \boxed{y''(\xi)\frac{h^3}{12} = O(h^3)}$$

$$\text{en M pasos } E_T = \sum_{k=1}^{M} y''(\xi)\frac{h^3}{12} \approx \boxed{\frac{b-a}{12}y''(\xi)h^2 = O(h^2)}$$

Precisión: En el extremo final del intervalo $E(y(b),h) \approx Ch^2$

Si se toma la mitad del paso $E(y(b),h/2) \approx C\,h^2/4$ $\therefore$ Si se reduce h a la mitad se espera que el error se reduzca a la cuarta parte

Ejemplo

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2}{t}y + t^2 e^t, & 1 \le t \le 2 \\ y(1) = 0, & h = 0.1 \end{cases}$$

$$Y_0 = \phi(t_0) = \phi(1) = 0$$

$$\begin{cases} Y_1^* = Y_0 + hf(t_0,Y_0) = 0 + .1 * f(1,0) = .1 * 2.718282 = .2718282 \\ Y_1 = Y_0 + \dfrac{h}{2}\left[f(t_0,Y_0) + f(t_1,Y_1^*)\right] = 0 + \dfrac{.1}{2}\left[f(1,0) + f(1.1,.2718282)\right] = .3423778 \approx \phi(1.10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_2^* = Y_1 + hf(t_1,Y_1) = .3423778 + .1 * f(1.1,.3423778) = .7681324 \\ Y_2 = Y_1 + \dfrac{h}{2}\left[f(t_1,Y_1) + f(t_2,Y_2^*)\right] = .3423778 + \dfrac{.1}{2}\left[f(1.1,.3423778) + f(1.2,.7681324)\right] = \\ \qquad = .8583146 \approx \phi(1.20) \end{cases}$$

$$E_{h=0.1} = \phi(1.20) - Y = .8666425 - .8583146 = .083279$$

Con Euler

$$E_{h=0.1} = \phi(1.20) - Y_2 = .8666425 - .6847556 = .1818869$$

Método de la Serie de Taylor

Si $y=\phi(t)$ es la solución exacta del P.V.I. con solución única y $\phi(t)$ tiene al menos las tres primeras derivadas continuas en el intervalo de interés $\Rightarrow$

$$\phi(\underbrace{t_k + h}_{t_{k+1}}) = \phi(t_k) + h\underbrace{\phi'(t_k)}_{f(t_k,\phi(t_k))} + \frac{h^2}{2!}\phi''(t_k) + \frac{h^3}{3!}\phi'''\underbrace{(\xi_k)}_{t_k \le \xi_k \le t_{k+1}}$$

$$\phi''(t_k) = f_t(t_k,\phi(t_k)) + f_y(t_k,\phi(t_k))\underbrace{\phi'(t_k)}_{f(t_k,\phi(t_k))}$$

Reemplazando $\phi(t_k)$, $\phi'(t_k)$, $\phi''(t_k)$ por sus valores aproximados

Y_k, $Y'_k = f(t_k,Y_k)$ y $Y''_k = f_t(t_k,Y_k) + f_y(t_k,Y_k)\, f(t_k,Y_k)$ respectivamente

$$\boxed{Y_{k+1} = Y_k + hY'_k + \frac{h^2}{2}Y''_k}$$

con error $\quad \dfrac{1}{6}h^3\phi'''(\xi_k)$

Ejemplo

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{2}{t}y + t^2e^t, & 1 \le t \le 2 \\ y(1) = 0, & h = 0.1 \end{cases}$$

$$Y_0 = y(t_0) = y(1) = 0$$

$$Y_{k+1} = Y_k + hY'_k + \frac{h^2}{2}Y''_k \Rightarrow Y_1 = Y_0 + hY'_0 + \frac{h^2}{2}Y''_0$$

$$Y'_k = f(t_k, Y_k) = \frac{2}{t_k}Y_k + t_k^2 e^{t_k}$$

$$Y'_0 = f(t_0, Y_0) = \frac{2}{t_0}Y_0 + t_0^2 e^{t_0} = 2.71828$$

$$Y''_k = f_t(t_k, Y_k) + f_Y(t_k, Y_k) f(t_k, Y_k) = \frac{2}{t_k^2}Y_k + t_k^2 e^{t_k} + 2t_k e^{t_k} + \frac{2}{t_k}Y'_k$$

$$Y''_0 = \frac{2}{t_0^2}Y_0 + t_0^2 e^{t_0} + 2t_0 e^{t_0} + \frac{2}{t_0}Y'_0 = 2.71828 + 4.71828 + 2 * 2.71828 = 13.5913$$

$$Y_1 = Y_0 + hY'_0 + \frac{h^2}{2}Y''_0 = 0 + .1 * 2.71828 + \frac{.1^2}{2}13.5913 = 0.3397$$

Método de Runge-Kutta

El método de Runge-Kutta se fundamenta en el método de la serie de Taylor, buscando la exactitud de este método pero sin tener que calcular derivadas parciales y de orden superior de la función *y(t).*

Existen métodos de Runge-Kutta de diferentes ordenes, el orden lo define el orden de la derivada en el término de la serie de Taylor donde ésta se corte.

R-K de segundo orden

La fórmula de los tres primeros términos de la serie de Taylor es

$$Y_{k+1} = Y_k + hY'_k + \frac{h^2}{2}Y''_k$$

$$= Y_k + hf(t_k, Y_k) + \frac{h^2}{2}\left[f_t(t_k, Y_k) + f_y(t_k, Y_k) f(t_k, Y_k)\right] =$$

$$= Y_k + h\left\{f(t_k, Y_k) + \frac{h}{2}\left[f_t(t_k, Y_k) + f_y(t_k, Y_k) f(t_k, Y_k)\right]\right\} =$$

$$= Y_k + \frac{h}{2}f(t_k, Y_k) + \frac{h}{2}\left[\boxed{f(t_k, Y_k) + f_t(t_k, Y_k)h + f_y(t_k, Y_k) f(t_k, Y_k)h}\right] =$$

Por Taylor $\boxed{f(t_k + h, Y_k + k)} \approx \boxed{f(t_k, Y_k) + f_t(t_k, Y_k)h + f_Y(t_k, Y_k)k}$

si $k = f(t_k, Y_k)h$

$$= Y_k + \frac{h}{2}f(t_k, Y_k) + \frac{h}{2}\left[\boxed{f(t_k + h, Y_k + f(t_k, Y_k)h)}\right]$$

$$Y_{k+1} = Y_k + \frac{1}{2}\underbrace{hf(t_k, Y_k)}_{K1} + \frac{1}{2}\underbrace{h\left[f(t_k + h, Y_k + \underbrace{f(t_k, Y_k)h}_{K1})\right]}_{K2}$$

La siguiente fórmula se conoce como la **Fórmula general de Runge-Kutta de segundo orden.**

$$Y_{k+1} = Y_k + aK_1 + bK_2 \;\text{ con }\; \begin{cases} K_1 = hf(t_k, Y_k) \\ K_2 = hf(t_k + \alpha h, Y_k + \beta K_1) \end{cases}$$

Se deben encontrar los valores *a, b*, y α, β tales que la fórmula tenga la exactitud del método de los tres primeros términos de la serie de Taylor sin tener que calcular derivadas de orden superior de la función $\phi(t)$.

Para $a=b=1/2$ y $\alpha=\beta=1$ es la fórmula de Heun o Euler mejorado

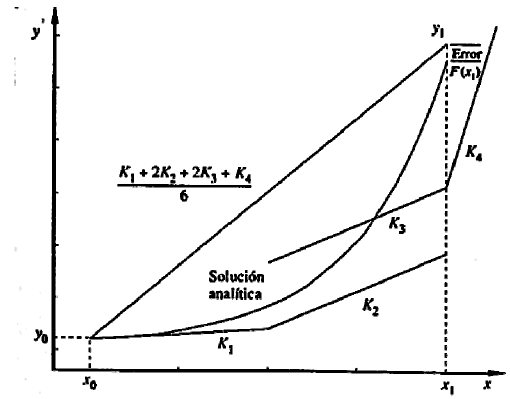
R-K de cuarto orden

La fórmula de Runge-Kutta que más se utiliza es equivalente a la fórmula de los cinco primeros términos de la serie de Taylor, o sea un método de Runge-Kutta de orden cuatro.

$$\begin{cases} Y_{k+1} = Y_k + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \text{ con } \begin{cases} K_1 = hf(t_k, Y_k) \\ K_2 = hf(t_k + \frac{1}{2}h, Y_k + \frac{1}{2}K_1) \\ K_3 = hf(t_k + \frac{1}{2}h, Y_k + \frac{1}{2}K_2) \\ K_4 = hf(t_k + h, Y_k + K_3) \end{cases} \\ Y_0 = y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Con **error local** de orden $O(h^5)$ y **error total** de orden $O(h^4)$, siempre y cuando la solución tenga las primeras cinco derivadas continuas.

Graficamente



Ejemplo

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{2}{t}y + t^2e^t, \quad 1 \le t \le 2 \\ y(1) = 0, \quad h = 0.1 \end{cases} \qquad Y_0 = 0 \qquad Y_1 = Y_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$\begin{cases} K_1 = hf(t_0, Y_0) = .1f(1,0) = .27182818 \\ K_2 = hf(t_0 + \frac{1}{2}h, Y_0 + \frac{1}{2}K_1) = .1f(1.05, \frac{.27182818}{2}) = .3409444 \\ K_3 = hf(t_0 + \frac{1}{2}h, Y_0 + \frac{1}{2}K_2) = .1f(1.05, \frac{.3409444}{2}) = .3475269 \\ K_4 = hf(t_0 + h, Y_0 + K_3) = .1f(1.1, .3475269) = .4266908 \end{cases}$$

$$Y_1 = 0 + \frac{1}{6}(.27182818 + (2)(.3409444) + (2)(.3475269) + .4266908) = .3459103$$

$$Y_2 = .8666217$$

$$\text{Error} = |Y_2 - y(1.2)| = |.8666217 - .8666425| = 2.08 * 10^{-5}$$

Cálculo de tamaño del intervalo
Ej: para el método RK4

En el extremo final del intervalo $E(y(b),h) \approx Ch^4$
Si se toma la mitad del paso $E(y(b),h/2) \approx C\, h^4/16$
Si se reduce h a la mitad se espera que el error se reduzca en 1/16.

Se podría estimar un h adecuado para mantener un error menor que un ε dado. El valor C será dependiente del problema.

Considerando el error local $E_k = Ch^5$, y que con la mitad de h se necesitan evaluar 2 puntos para evaluar k

$$2E_{k/2} = 2C\frac{h^5}{32} \Rightarrow E_k - 2E_{k/2} = Ch^5 - 2C\frac{h^5}{32} = \frac{15}{16}Ch^5 \Rightarrow C = \frac{16(E_k - 2E_{k/2})}{15h^5}$$

$$\left.\begin{aligned} [y_1]_k &\approx \phi(1) + E_k \\ [y_1]_{k/2} &\approx \phi(1) + 2E_{k/2} \end{aligned}\right\} E_k - 2E_{k/2} \approx [y_1]_{k/2} - [y_1]_k \Rightarrow \boxed{C = \frac{16}{15}\frac{[y_1]_{k/2} - [y_1]_k}{h^5}}$$

$$\text{Considerando } \varepsilon = E_k = Ch^5 \Rightarrow \boxed{h = \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{1/5}}$$

Método R-K-Feldberg

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{1}{4}h,\ y_n + \frac{1}{4}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{3}{8}h,\ y_n + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_n + \frac{12}{13}h, y_n + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3)$$

$$k_5 = hf(x_n + h,\ y_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4)$$

$$k_6 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$$

$$z_{n+1} = y_n + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12.825}k_2 + \frac{28.561}{56.430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$$

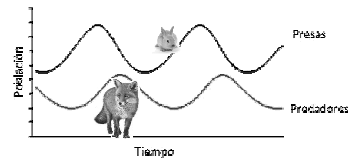
$$E = \frac{1}{360}k_1 - \frac{128}{4275}k_3 - \frac{2197}{75240}k_4 + \frac{1}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$$

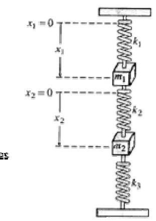
$$s = \left(\frac{\varepsilon h}{2|z_{n+1} - y_{n+1}|}\right)^{1/4}$$

ε = tolerancia
s= paso óptimo

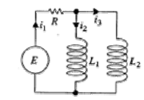
Sistemas de EDOs de primer orden

Movimiento vertical de los resortes acoplados





Corrientes en una red eléctrica

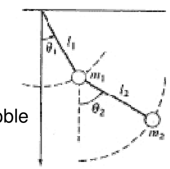


Modelo predador-presa

$$\frac{dx}{dt} = Ax - Bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = -Cy + Dxy$$

Péndulo doble



Sistemas de EDOs de primer orden

$$\frac{dx}{dt} = x' = f_1(t, x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y' = f_2(t, x, y)$$

$$x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0$$

Se aplica algún método (preferiblemente Runge-Kutta de orden cuatro) a cada una de las ecuaciones del sistema.

$$Y_{k+1} = Y_k + \frac{1}{6}(K_{1y} + 2K_{2y} + 2K_{3y} + K_{4y}) \text{ con } \begin{cases} K_{1y} = hf_2(t_k, X_k, Y_k) \\ K_{2y} = hf_2(t_k + \frac{1}{2}h, X_k + \frac{1}{2}K_{1x}, Y_k + \frac{1}{2}K_{1y}) \\ K_{3y} = hf_2(t_k + \frac{1}{2}h, X_k + \frac{1}{2}K_{2x}, Y_k + \frac{1}{2}K_{2y}) \\ K_{4y} = hf_2(t_k + h, X_k + K_{3x}, Y_k + K_{3y}) \end{cases}$$

$$X_{k+1} = X_k + \frac{1}{6}\ldots$$

Ejemplo:

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y = f(t,x,y) \qquad \frac{dy}{dt} = 3x + 2y = g(t,x,y) \qquad \begin{cases} x(0) = 6 \\ y(0) = 4 \end{cases} \qquad h=0.02$$

$$f(t,x,y) = x + 2y \qquad g(t,x,y) = 3x + 2y \qquad h=0.02$$

$$K_{1f} = h\,f(t_0, x_0, y_0) = 0.02\,f(0,6,4) = .28$$

$$K_{1g} = h\,g(t_0, x_0, y_0) = 0.02\,g(0,6,4) = .52$$

$$K_{2f} = h\,f(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}K_{1f}, y_0 + \frac{1}{2}K_{1g}) = 0.02\,f(0.01, 6.14, 4.26) = .2932$$

$$K_{2g} = h\,g(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}K_{1f}, y_0 + \frac{1}{2}K_{1g}) = 0.02\,g(0.01, 6.14, 4.26) = .5388$$

$$K_{3f} = h\,f(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}K_{2f}, y_0 + \frac{1}{2}K_{2g}) = 0.02\,f(0.01, 6.1466, 4.2694) = .2937$$

$$K_{3g} = h\,g(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}K_{2f}, y_0 + \frac{1}{2}K_{2g}) = 0.02\,g(0.01, 6.1466, 4.2694) = .5395$$

$$K_{4f} = h\,f(t_0 + h, x_0 + K_{3f}, y_0 + K_{3g}) = 0.02\,f(0.02, 6.2937, 4.5396) = .3074$$

$$K_{4g} = h\,g(t_0 + h, x_0 + K_{3f}, y_0 + K_{3g}) = 0.02\,g(0.02 + 6.2937 + 4.5395)$$

$$x_1 = x_0 + \frac{1}{6}(K_{1f} + 2K_{2f} + 2K_{3f} + K_{4f}) = 6 + \frac{1}{6}(.28 + 2(.2932) + 2(.2937) + .3074) = 6.2935$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(K_{1g} + 2K_{2g} + 2K_{3g} + K_{4g}) = 4 + \frac{1}{6}(.52 + 2(.5388) + 2(.5395) + .5592) = 4.5393$$

EDOs de orden N

Si la ecuación es de orden ≥ 2, se transforma la ecuación en un sistema de EDOs de primer orden. Ejemplo:

$$\begin{cases} t^2 y'' - 2ty' + 2y + t^3 * \ln(t) \\ y(1) = 1, \quad y'(1) = 0, \quad 1 \le t \le 1.5 \end{cases}$$

Se transforma el P.V.I. en un sistema de EDOs de primer orden.

- Se despeja el diferencial de mayor orden. $\Rightarrow y'' = \frac{2}{t} y' - \frac{2}{t^2} y + t * \ln(t)$
- Se reemplazan las funciones por otras equivalentes, de manera de eliminar las diferenciales de orden superior

$$\begin{cases} y' = g = f_1(t, y, g) \\ g' = y'' = \frac{2}{t} g - \frac{2}{t^2} y + t * \ln(t) = f_2(t, y, g) \\ y(1) = 1, \quad g(1) = 0, \quad h = 0.05 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = g = f_1(t, y, g) \\ g' = \frac{2}{t} g - \frac{2}{t^2} y + t * \ln(t) = f_2(t, y, g) \\ y(1) = 1, \quad g(1) = 0, \; h = 0.05 \end{cases}$$

$$K_{1f_1} = hf_1(t_0, y_0, g_0) = .05\; f_1(1,1,0) = .05\;(0) = 0$$

$$K_{1f_2} = hf_2(t_0, y_0, g_0) = .05\; f_2(1,1,0) = .05\;(\frac{2}{1} 0 - \frac{2}{1^2} 1 + \ln(1)) = -.1$$

$$K_{2f_1} = hf_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_{1f_1}}{2}, g_0 + \frac{K_{1f_2}}{2}\right) = .05 f_1(1.025, 1, -.05) = -2.5 * 10^{-3}$$

$$K_{2f_2} = hf_2\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_{1f_1}}{2}, g_0 + \frac{K_{1f_2}}{2}\right) = .05 f_2(1.025, 1, -.05) = -.098793992$$

$$K_{3f_1} = hf_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_{2f_1}}{2}, g_0 + \frac{K_{2f_2}}{2}\right) = .05 f_1(1.025, .99875, -.049396996) =$$

$$= -2.4698498 * 10^{-3}$$

$$K_{3f_2} = hf_2\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_{2f_1}}{2}, g_0 + \frac{K_{2f_2}}{2}\right) = .05 f_2(1.025, .99875, -.049396996) =$$

$$= -.098616185 5$$

$$K_{4f_1} = hf_1(t_0, y_0 + K_{3f_1}, g_0 + K_{3f_2})$$

$$= .05 f_1(1.05, .9975301502, -.0986161855) = -4.930809278 * 10^{-3}$$

$$K_{4f_2} = hf_2(t_0, y_0 + K_{3f_1}, g_0 + K_{3f_2}) = .05 f_2(1.05, .9975301502, -.0986161855)$$

$$= -.0973094592$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(K_{1f_1} + 2K_{2f_1} + 2K_{3f_1} + K_{4f_1}) =$$

$$= 1.0 + \frac{1}{6}(0 + 2(-2.5 * 10^{-3}) + 2(-2.4698498 * 10^{-3}) - 4.930809278 * 10^{-3})$$

$$= .9975215819$$

$$\vdots$$

$$g_1 = y_0 + \frac{1}{6}(K_{1f_2} + 2K_{2f_2} + 2K_{3f_2} + K_{4f_2}) =$$

$$= 0 + \frac{1}{6}(-.1 + 2(-.0987793992) + 2(-.0998616185) - .0973094592)$$

$$= -.0986883023$$

Comados Matlab

[T, Y, S] = *comando* (‘F’, tspan, y0, opciones, p1, p2,...)

comando:

- **Ode45:** Compara resultados de Runge-Kutta de orden 4 y 5. Dormand-Prince
- **Ode23:** Compara resultados de Runge-Kutta de orden 2 y 3. Bogacki and Shampine.
- **Ode113:** Multipaso, Adams-Bashforth-Moulton
- Los comandos **Odexxs, Odexxt y Odexxtb, :** Comparan resultados de Runge-Kutta con distintos niveles de tolerancia.

Comados Matlab (cont.)

Parámetros de entrada:
'F': función conteniendo dy/dt, o vector columna de funciones dy_i/dt
tspan:vector conteniendo el intervalo de integración *[t0, tfinal]* ó puntos a evaluar *[t0, t1, t2,..., tfinal]* ó *[t0:h:tfinal].*
y0: vector de condiciones iniciales.
opciones:creadas con **odeset**.
p0, p1, p2, ... : opciones pasadas a la función/es.

Parámetros de salida:
T: vector de puntos t.
Y: matriz solución, cada fila corresponde a cada valor t, cada columna a y_i.
S: estadísticas de los cálculos